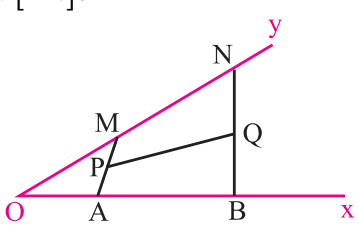
Exercices et problèmes

1 Soit A et A' deux points distincts du plan et Δ la médiatrice du segment $[AA']$.
Soit B un point du plan n'appartenant pas à Δ tel que (AB) et Δ ne sont pas parallèles.
Construire à la règle seulement le symétrique B' de B par rapport à la droite Δ.

2 Dans la figure ci-dessous $[Ox)$ et $[Oy)$ sont demi-droites sécantes. A et B sont deux points fixes de $[Ox)$.
Soit M et N deux points variables sur $[Oy)$ tels que $MN = AB$ et $N \in [My)$.
On note P le milieu du segment $[AM]$ et Q le milieu du segment $[BN]$.



Montrer que Q est l'image de P par une translation qui ne dépend pas des points M et N.

3 On considère un triangle ABC de centre de gravité G. On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par une isométrie qui fixe G.
Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

4 Soit S_1 et S_2 deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
1. Discuter, suivant la position relative de Δ_1 et Δ_2, la nature de $S_1 \circ S_2$.
2. A quelle condition sur Δ_1 et Δ_2, a-t-on $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$?

5 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en deux points A et B.
Soit deux points I et J tels que le quadrilatère IAJB est un losange et I est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$.
On suppose que les droites (IA) et (IB) recoupent le cercle $\mathscr{C}'$ respectivement en P et Q et que les droites (JA) et (JB) recoupent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement en M et N.
Montrer que le quadrilatère MNQP est un rectangle.

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
1. Déterminer les images de A, I et L par la symétrie centrale S_1 de centre O.
2. Construire les points E et F, images respectives de J et K par la symétrie centrale S_2 de centre C.
3. Déterminer les images de A, I et L par $S_2 \circ S_1$, puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Conclure.

7 On considère un triangle ABC rectangle en A, on note A' le symétrique de A par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ et A'' le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).
Montrer que le quadrilatère $ACA''B$ est un rectangle.

8 On considère un triangle ABC isocèle en A.
On désigne par D l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (AC) et par I le milieu du segment $[BC]$.
Soit f une isométrie laissant A invariant et transformant B et C respectivement en C et D.
On pose $g = S_{(AC)} \circ f$.
1. Déterminer $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(I)$.
2. Montrer que g est une symétrie orthogonale.

9 Soit ABC un triangle équilatéral direct.
On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à (AC).
Soit J un point de [BA] distinct de B.
La droite passant par J et parallèle à (AC) coupe [BC] en un point K.
1. Caractériser $S_{(AC)} \circ S_\Delta$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
2. Identifier $f = S_{(AC)} \circ S_\Delta \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
3. Déterminer la position du point J sur [BA] pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.